ルービッククロックを拡張したパズル「n次元クロック」について

動機　目的

高次元空間の図的認識 ＝ 複雑な現象、データ、抽象概念の理解力に結び付くが、困難。

Q 図的認識を助けるものはないだろうか？

先行研究に、高次元空間で遊ぶルービックキューブを見つける

★高次元のルービックキューブ

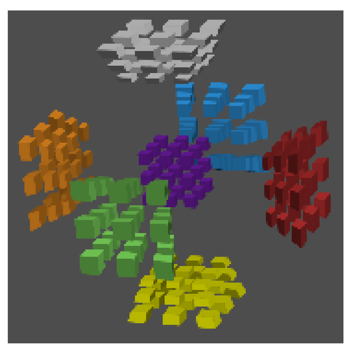
(Magic Cube 4D, 5D など)

- 高次元での動きを、自分でパズルを解きながら学べる！
- 低次元のルービックキューブと比較しながら高次元を学べる。

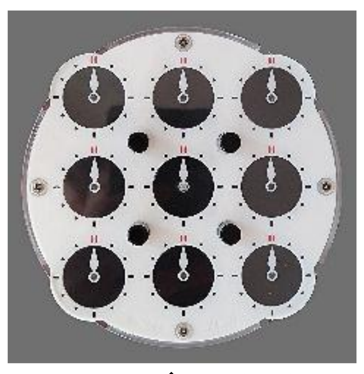
通常のルービックキューブ以上の解く難易度で遊びにくい

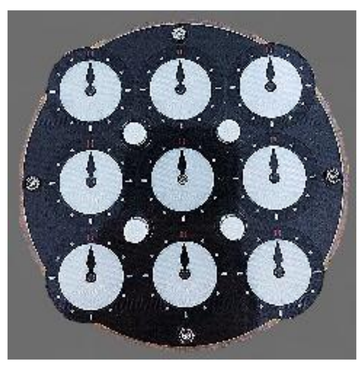
より遊びやすい高次元空間が学べるパズルを作ろう！

(Magic Cube 4Dの図(下)/Magic Cube 4Dより引用)



ルービッククロック





(ルービッククロックの表と裏の図)

- 表裏に合計18個の時計
- 間に4つのボタン(表裏連動)
- 角に4つの操作ダイヤル

ダイヤルで時計を回すことができ、ダイヤルとボタンの上げ下げによって、回せる時計の組み合わせが、決まる。

分解

- ボタンに付いた歯車により、ボタンと隣り合う表か裏の4つの針が連動するようになっている。
- 角の時計は表裏で繋がっており、独立して回る時計は14個となる。

★このパズルのゴール

バラバラな向きの針を、ボタンとダイヤルを駆使して全て12時の方向に揃える。(これ以降解くという)

★遊びやすさ

- ルービックキューブと違い、解法の習得に手順の暗記が必要ない。

⇒比較的簡単に解くことができる。遊びやすい。

ルービッククロックを高次元化したパズルは、遊びやすく、かつ高次元空間を学べるパズルになるのではないか。

研究方法

①通常のルービッククロックを座標平面で表し、それを基に一般次元(n次元空間ユークリッド空間)に拡張する。
②拡張したものについて、中心投影、斜投影を用いて３次元空間上に可視化する。
③解法を指標にして、高次元のルービックキューブと遊びやすさを比較、高次元空間を学べるかを考える。また、改善点を明らかにする。

n次元クロックの定義

時計、針、ボタン、ダイヤルの設定

要素	記号	定義
時計	$C_1, C_2, \ldots, C_{2\cdot 3^n - 2^n}$	$C_1 \sim C_{3^n}$：各成分が−1,0,1でできる点に置く。 $C_{3^n+1} \sim C_{2\cdot 3^n - 2^n}$：各成分が1,0,-1でできる点で、少なくとも１つ0を含む点に置く。
時計　表	F_0	$F_0 \coloneqq \{C_1, C_2, \ldots, C_{3^n}\}$
時計　裏	F_1	$F_1 \coloneqq \{角の時計\} \cup \{C_{3^n+1}, \ldots, C_{2\cdot 3^n - 2^n}\}$
針の向き	$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2\cdot 3^n - 2^n}$	C_lの針の向きをベクトル$\boldsymbol{v}_l$で表し、完成状態は $\boldsymbol{v}_l \coloneqq (0, \ldots, 0, 1)$
ボタン	$B_1, \ldots, B_{2^n}$	各成分が0.5,-0.5でできる点に置く。
ボタンの状態	$s_1, \ldots, s_{2^n}$	B_mの状態s_mは　$s_m \coloneqq \begin{cases} 0 & (オフと呼ぶ) \\ 1 & (オンと呼ぶ) \end{cases}$
ダイヤル	$D_1, \ldots, D_{2^n}$	番号が同じボタンと、対応するように置く。

時計の回り方

ダイヤルを回したとき、$\boldsymbol{v}_k$に次の変換をする。$\boldsymbol{v}_k$は列ベクトルで計算する。

$$\boldsymbol{v}_k \leftarrow R_{tu}\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{v}_k$$

ただし$R_{tu}(\theta)$は、n次単位行列のt行t列目とu行u列目を$\cos\theta$に、t行u列目を$-\sin\theta$、u行t列目を$\sin\theta$に変えて得られる行列とする。
t, uの決め方は、ダイヤルの回し方による。
回る時計C_kの決め方について考える。ボタンの状態を決めたうえで、ダイヤルD_iを回したときのC_k全体の集合Xは、次のように定義する。

$$X \coloneqq \bigcup_{\{a | s_a = s_i\}} X_a$$

ただし、X_aはF_{s_i}の元でB_aとの距離が最小のものの集合とする。

n=2の図(通常のルービッククロックと同じ)

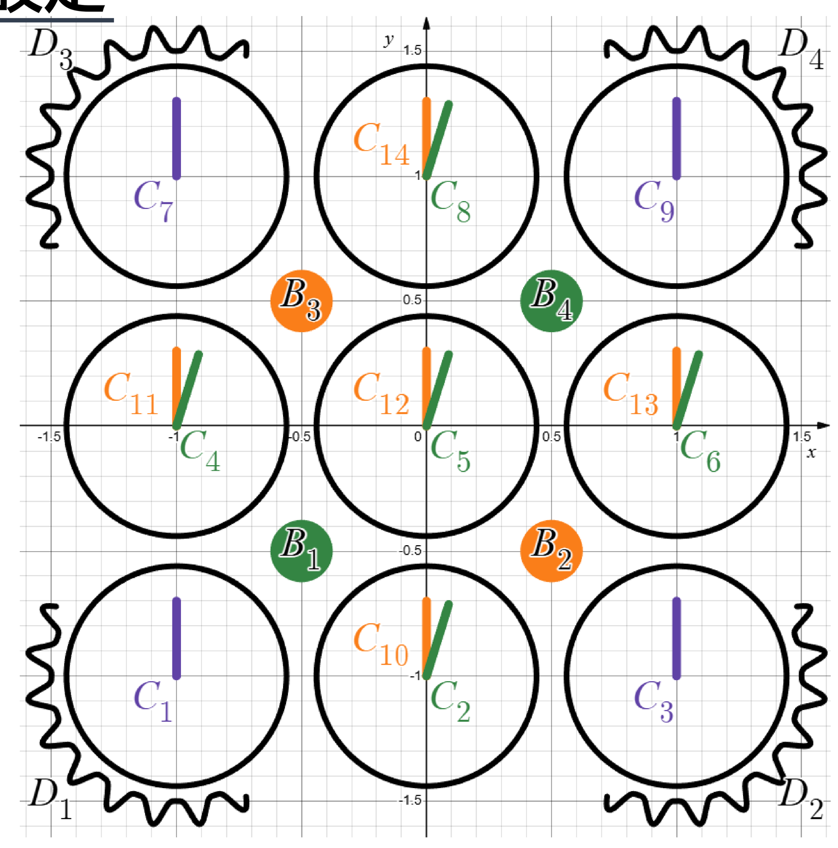
時計、針、ボタン、ダイヤルの設定

緑、紫色の時計：表の時計F_0
(裏の時計の針が見えるように針を少し回した。)

橙、紫色の時計：裏の時計F_1

緑色のボタン：$s_m = 0$(オフ)

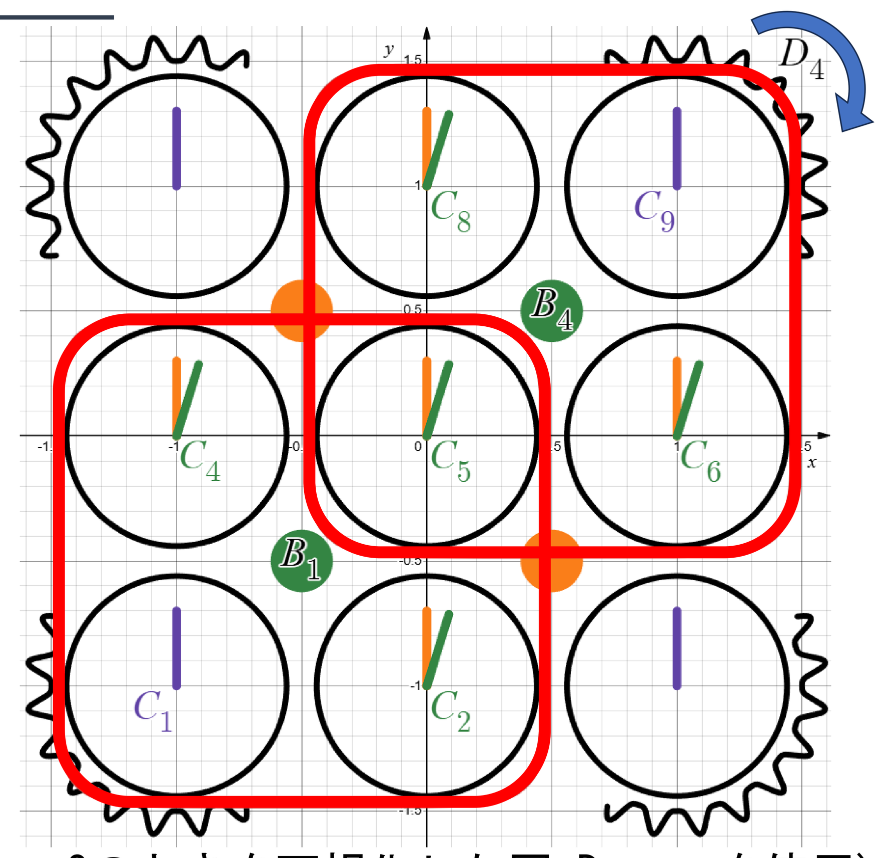
橙色のボタン：$s_m = 1$(オン)



時計の回り方

図の赤で囲んだラベル付きの時計：注目したボタンとの距離が最小の時計で、注目したボタンと同色の時計X_a(図の例ではX_1, X_4)。

1. 回すダイヤル(図はD_4)に対応するボタン(図ではB_4)と同じ状態のボタン(図ではB_1, B_4)に注目する。
2. 注目したボタンの周りのある時計で、そのボタンの色と同じ色の時計の針を回す。



(右図2枚ともn=2のときを可視化した図:Desmosを使用)

可視化の方法

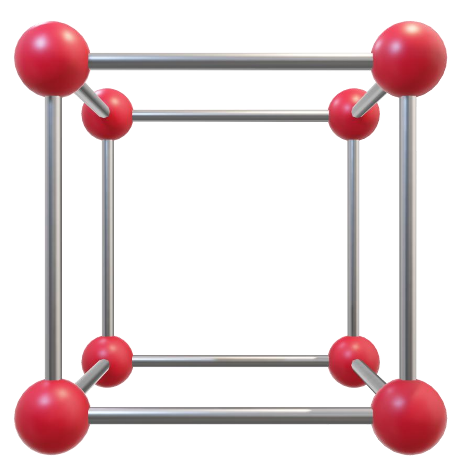
4次元以降は、投影を用いて可視化する。今回はn＝4, 5, 6の場合について、中心投影と斜投影を組み合わせた以下の方法で可視化する。

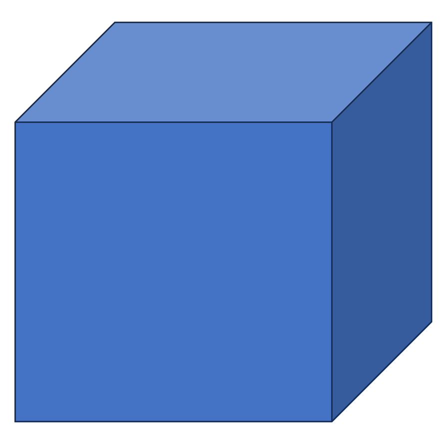
$$(a_1, \ldots, a_4) \rightarrow \frac{h}{h - a_4}(a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_1, \ldots, a_5) \rightarrow \frac{h}{h - a_5}(a_1, a_2, a_3) + h' a_4 (1,1,1)$$

$$(a_1, \ldots, a_6) \rightarrow \frac{h}{h - a_6}(a_1, a_2, a_3) + h' a_5 (1,1,1) + h' a_4 (-1, -1, 1)$$

ただし、h, h'は正の実数定数とする。
可視化の際、時計は針以外省略し、ダイヤルも省略する。





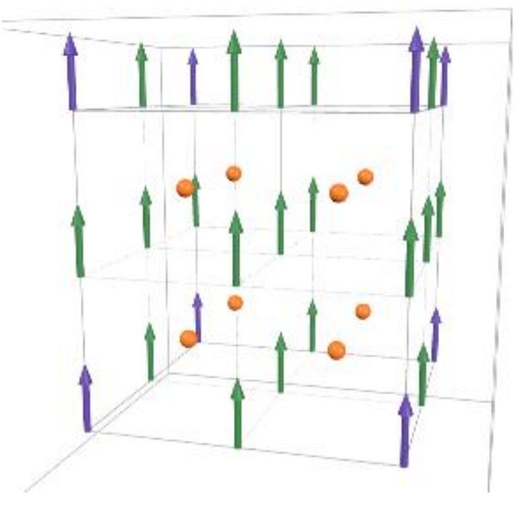
(三次元から二次元への投影。左が中心投影。右が斜投影。)

0650　愛知県立時習館高等学校

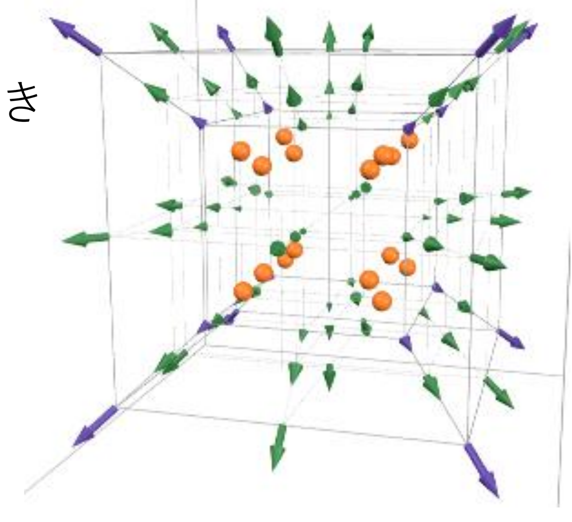
n 次元クロックの作成結果(可視化)

作成したｎ次元クロック(n=3, 4, 5, 6)の完成状態を3次元座標空間上に映し出す。

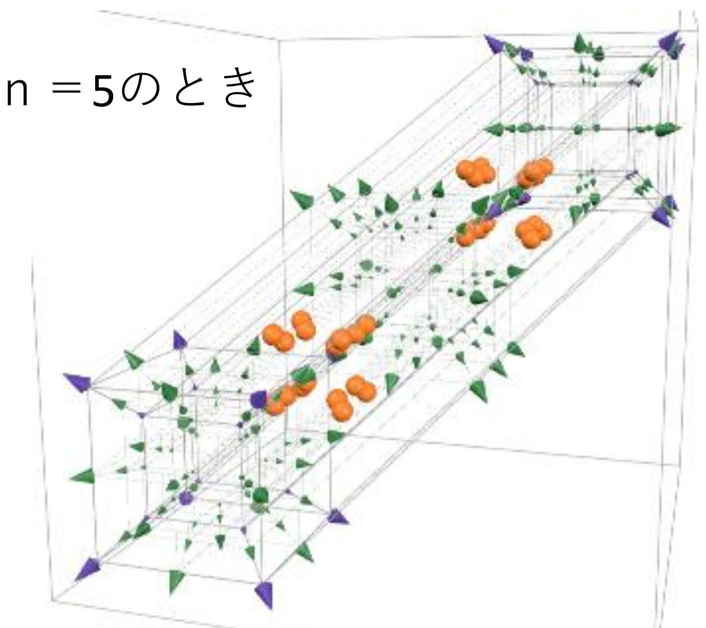
ｎ＝3のとき



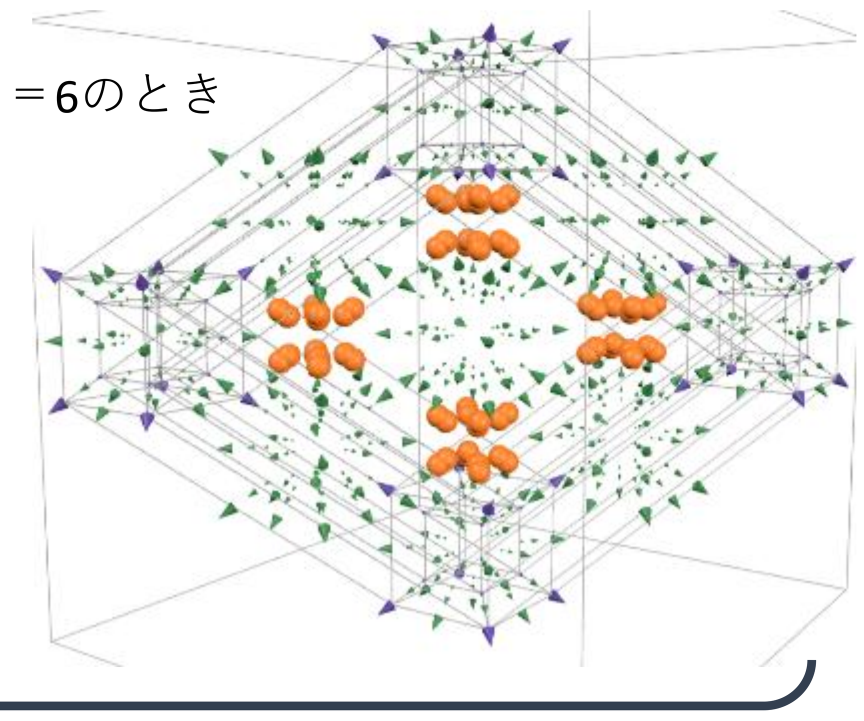
ｎ＝4のとき



ｎ＝5のとき



ｎ＝6のとき



・同一の定義により回転するので、低次元と高次元のクロックで動きを比較可能。

・ｎが4以上では投影の影響によって針の長さが場所や向きによって変わって見える。

(4つの図すべてDesmosを使用)

n 次元クロックの作成結果(性質)

n次元クロックの解法

ｎ次元クロックの解法で、通常のルービッククロックの解法(The Rubik's Clock Puzzle Solution Guideに記載)を拡張した解法を考えた。

①時計を分類：F_σの元であって、位置の成分のうち0であるものの個数がN個であるもの全体の集合を$S_{\sigma N}$とする。ちなみにこのとき、$S_{00}=S_{10}$である。

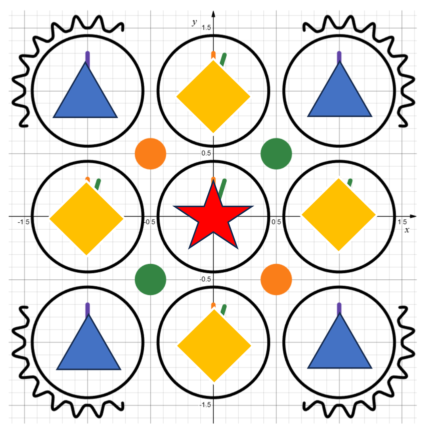
②分類したうちの1組を揃える：$S_{\sigma N}$の元の針すべてを$(0,\dots,0,1)$の方向に揃える方法で、以下のものを考える。
任意の$C_l \in S_{\sigma N}$に対して、C_lとの距離が最小のボタンのみを$s_m=1-\sigma$の状態にする。その次に、$s_i=\sigma$であるダイヤルD_iのうちの1つを、$S_{\sigma n}$の元の針を$\boldsymbol{v}_l$の方向に合わせるように回転させる。これをすべての$C_l \in S_{\sigma N}$で行った後、すべてのボタンを$s_m=\sigma$の状態にする。そして、好きなダイヤルを回して、$S_{\sigma n}$の元の針を$(0,\dots,0,1)$の方向に合わせるように回転させる。

③順に繰り返す：この方法を、$S_{0(n-1)}, S_{0(n-2)}, \dots, S_{01}, S_{1(n-1)}, S_{1(n-2)}, \dots, S_{11}, S_{10}$の順で実行する。

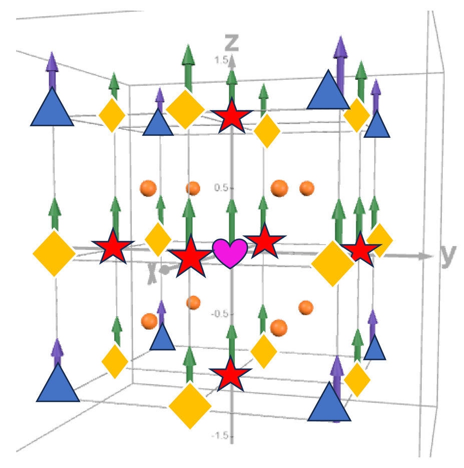
この解法は、**手順暗記が必要なく**、この点は通常のルービッククロックと変わらない。そして、Magic Cube 4Dなどの高次元のルービックキューブと大きく異なる点である。
また、時計を分類した$S_{\sigma N}$はｎ次元立方体の各N次元表面の中心に位置する時計の集合となる。

n=2,3のときの略解

①時計の分類の図



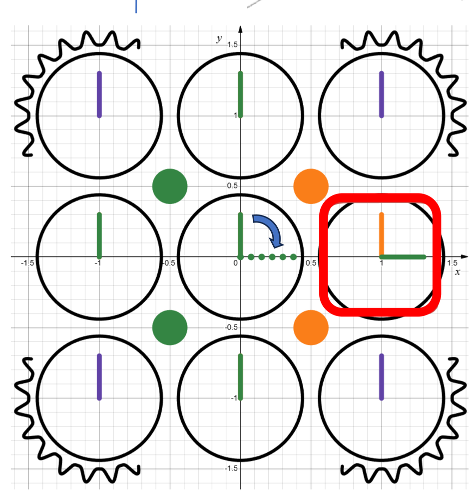
★：S_{02}, S_{12}
◆：S_{01}, S_{11}
▲：$S_{00}(=S_{10})$

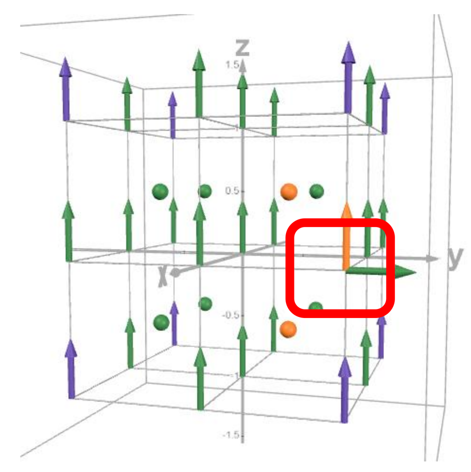


♥：S_{03}, S_{13}
★：S_{02}, S_{12}
◆：S_{01}, S_{11}
▲：$S_{00}(=S_{10})$

②の例(S_{01}を揃える)

1. S_{01}の一つに注目し、注目した時計から最も遠いボタンのみオフにする。
2. オフのボタンに対応するダイヤルを回して、中心の緑の針が注目した時計と同じ向きになるようにする。
3. S_{01}の全てで1.2.を行ってから、全てのボタンをオフにして中心の緑の針を12時に向ける。





(4つの図全てDesmosを使用)

③②を順に繰り返す。

解く時間と見やすさ

ｎが大きくなるにつれて、針の本数は指数関数的に増加する。
(※ルービックキューブにも同様のことがいえる。)

・**解く際にかかる時間が大幅に増えていく。**
・**パズルが見にくくなっていく。**

n 次元クロックの考察

遊びやすさ、高次元空間を学べるか

・針は同じように定義したルールによって回る。
・解くとき、時計をｎ次元立方体の構造に従って分類するので、ｎ次元立方体の構造を学べる。
・解法の習得には、ルービックキューブのような手順の暗記が不要。

ｎ次元クロックは、低次元のクロックと比較しつつ、高次元空間について学べる。さらに、容易に解けるため、高次元のルービックキューブよりも遊びやすい。

改善点

・投影により針の長さが変わって見える。
次元の増加により針が指数関数的に増加することで、
・パズルの視認性が下がる。
・解く時間が増えていく。

次元の増加とともにパズルが遊びづらくなっていく。

★改善策
・一時的に、針の大きさを揃えたり一部の針を見えなくしたりなどができる機能。
・パズルのゴールとして揃えること以外に、完成状態から指定の形にする(ルービックキューブの模様作りに近いもの)など別のものを用意。

等が考えられる。

まとめ　結論

高次元空間の図的認識に役立てるパズルとして、ｎ次元クロックを定義して性質を調べていった。次元の増加とともにパズルが遊びづらくなるという課題があるため、今後の改善が必要だが、高次元のルービックキューブよりも遊びやすく、より高次元空間の認識に役立つパズルとして使用できる可能性が十分にある。

今後の展望

遊びやすくするのための改善を進めていきたい。また、本研究で記した解法より効率のいい解法の追求や、他のパズルの高次元化についても考えたい。

参考文献

[1] Magic Cube 4D　[2] The Rubik's Clock Puzzle Solution Guide
[3] 宮崎興二「自然界に見る高次元立方体の投影」
[4] 前田篤彦, 杉山公造, 間瀬健二「巡回パズルのメディア変換とパズル・ジェネレータの試作」

0650　愛知県立時習館高等学校